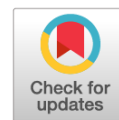


Оригинальное исследование

УДК 539.422.224:004.942

DOI: https://doi.org/10.52899/24141437_2025_02_215

EDN: QKTZDF



Возможности численных бессеточных методов для моделирования механического поведения ледовой среды

А.А. Родионов, С.В. Рябушкин

Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, Санкт-Петербург, Россия

АННОТАЦИЯ

Актуальность. Современные инструменты численного моделирования представляют широкие возможности для решения актуальных прикладных задач ледовой механики. Однако лед является сложным для моделирования материалом, что требует выработки соответствующих подходов для математического описания его поведения.

Цель работы — обзор и исследование возможностей современных численных методов для моделирования льда, а также разработка собственной математической модели для решения задач взаимодействия со льдом.

Материалы и методы. Анализ применения численных методов в ледовой механике выполняется на основе обзора соответствующих публикаций в научно-технических журналах. Основным методом исследования является вычислительный эксперимент с применением различных подходов к описанию поведения материала под нагрузкой.

Результаты. Получена математическая модель льда на базе метода сглаженных частиц. Выполнено моделирование стандартных механических испытаний ледовых образцов для тестирования метода и калибровки модели материала.

Заключение. Результаты расчетов согласуются с экспериментальными данными. Разработанная модель в перспективе может быть использована для решения задач взаимодействия инженерных конструкций со льдом.

Ключевые слова: численное моделирование; ледовая среда; механика льда; бессеточные методы; метод сглаженных частиц; модель Джонсона-Холмквиста.

Как цитировать

Родионов А.А., Рябушкин С.В. Возможности численных бессеточных методов для моделирования механического поведения ледовой среды // Труды Санкт-Петербургского государственного морского технического университета. 2025. Т. 4, № 2. С. 215–228. DOI: 10.52899/24141437_2025_02_215 EDN: QKTZDF

Original study article

DOI: https://doi.org/10.52899/24141437_2025_02_215

EDN: QKTZDF

Potential of Meshless Numerical Methods for Mechanical Simulation of Ice Environment

Aleksandr A. Rodionov, Sergey V. Ryabushkin

Saint Petersburg State Marine Technical University, Saint Petersburg, Russia

ABSTRACT

BACKGROUND: Modern numerical modeling tools provide ample opportunities for solving current applied problems of ice mechanics. However, ice is difficult to model and it requires the development of appropriate approaches to the mathematical description of its behavior.

AIM: To review and study the capabilities of contemporary numerical ice modeling methods and develop our own mathematical model to solve ice interaction problems.

MATERIALS AND METHODS: The application of numerical methods in ice mechanics is analyzed based on a review of relevant publications in scientific and technical journals. The main study method is a computational experiment using various approaches to describing the on-load behavior of the material.

RESULTS: We defined a mathematical ice model using the smoothed particle hydrodynamics method. We simulated standard mechanical tests of ice samples to test the method and adjust the material model.

CONCLUSIONS: The calculations are consistent with the experimental data. In the future, the developed model can be used to solve problems of engineering structures and ice interaction.

Keywords: numerical modeling; ice medium; ice mechanics; meshless methods; smoothed particle hydrodynamics method; Johnson–Holmquist damage model.

To cite this article

Rodionov AA, Ryabushkin SV. Potential of Meshless Numerical Methods for Mechanical Simulation of Ice Environment. *Transactions of the Saint Petersburg State Marine Technical University*. 2025;4(2):215–228. DOI: [10.52899/24141437_2025_02_215](https://doi.org/10.52899/24141437_2025_02_215) EDN: QKTZDF

Submitted: 19.02.2025

Accepted: 05.05.2025

Published online: 26.06.2025

ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

В последнее время численные методы в прикладной механике льда переживают интенсивное развитие, обусловленное растущей потребностью в разработке и усовершенствовании расчетных моделей контактного взаимодействия элементов конструкции с ледовой средой. Ледовые условия, характерные для арктических и субарктических регионов, создают серьезные вызовы при проектировании и эксплуатации инженерных сооружений, таких как буровые платформы, ледакольные суда, амфибийные транспортные средства, элементы пропульсивного комплекса (ПК) и т.д. Корректное и достоверное определение ледовых нагрузок имеет большое прикладное значение для обеспечения надежности, безопасности и долговечности перечисленных конструкций и сооружений.

Традиционно для оценки ледовых нагрузок разрабатываются специализированные нормативные документы, которые относятся к определенному типу сооружений и в значительной степени опираются на экспериментальные исследования и накопленный опыт эксплуатации. Такой подход обычно приводит к консервативным оценкам с упрощенными схемами приложения нагрузок, что не позволяет в полной мере учитывать сложную многофакторную природу и динамику взаимодействия объекта со льдом. Эти обстоятельства подчеркивают необходимость применения современных методов проектирования морских ледостойких сооружений, включая численное моделирование силового взаимодействия льда с элементами и деталями конструкций, сооружений и машин. Развитие численных методов позволяет моделировать сложные процессы взаимодействия льда с инженерными объектами, что открывает новые возможности для повышения эффективности проектных решений, особенно в условиях ограниченного опыта эксплуатации.

В настоящее время полномасштабное численное моделирование в проектировании морских ледостойких сооружений используется крайне редко. Хотя количество исследований по численному моделированию механики льда пока невелико, их число увеличивается в последние годы, что свидетельствует о растущем интересе научного сообщества к этой теме. Необходимо отметить, что, с вычислительной точки зрения, задачи локального взаимодействия жестких объектов и деформируемых конструкций с ледовыми массивами являются одними из самых сложных задач механики деформируемого твердого тела (МДТТ), так как они включают практически все виды нелинейностей. В общем случае, указанные задачи являются нестационарными (быстропротекающими), контактными, геометрически и физически нелинейными, что требует выработки соответствующих подходов к численному моделированию контактного взаимодействия с ледовой средой.

На сегодняшний день не существует общепризнанных численных моделей, которые бы учитывали все

особенности поведения льда под нагрузкой. Это отчасти объясняет большое количество численных моделей, разработанных за последние годы для описания поведения хрупких материалов, таких как лед. Более того, остаются нерешенными вопросы о возможности использования и пределах применимости различных численных методов, разработанных в других областях МДТТ, непосредственно для моделирования контактного взаимодействия льда с конструкциями и элементами сооружений. Отсутствие общепризнанного мнения по данному вопросу служит стимулом для более детальной и глубокой проработки проблемы.

На основании изложенного, целью настоящей работы является обзор и анализ возможностей современных численных методов МДТТ применительно к задачам скоростного деформирования и разрушения ледовой среды, а также разработка собственной математической модели, интегрирующей новейшие достижения вычислительной механики, для описания механического поведения льда в широком диапазоне изменения внешних воздействий.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОДХОДЫ К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ЛЕДОВОЙ СРЕДЫ

На текущий момент различают два основных фундаментальных подхода к рассмотрению (моделированию) льда [1]:

1. Как *сплошного* тела в виде непрерывной среды, поведение которой описывается классическими уравнениями механики сплошных сред (МСС). Одним из ключевых преимуществ рассматриваемого подхода является возможность его легкой интеграции с классическими сеточными методами (методом конечных элементов, МКЭ и его модификациями). Однако, несмотря на широкую распространенность МКЭ, моделирование льда как сплошного тела имеет серьезные ограничения в задачах хрупкого разрушения, сопровождающегося нарушениями сплошности и интенсивной дефрагментацией ледовой среды;
2. Как *дискретного* тела, состоящего из большого числа отдельных элементов (частиц, гранул), способных определенным образом взаимодействовать друг с другом. Для описания механического поведения среды в рамках указанного подхода используются бессеточные методы МДТТ, не зависящие от фиксированной сетки, характерной для традиционных методов (МКЭ и его модификации). Фактическое отсутствие конечно-элементной сетки и замена тела набором отдельных частиц позволяет эффективнее и точнее моделировать процессы динамического взаимодействия и разрушения, сопровождающиеся интенсивным трещинообразованием и дефрагментацией материала (в виде дробления, крошения, скалывания и смятия).

В связи с тем, что на текущий момент не существует общепризнанных методов численного моделирования силового воздействия льда на конструкции и сооружения, предварительный анализ и сопоставление различных подходов, выработанных в отдельных областях прикладной механики льда, остается актуальным.

ВОЗМОЖНОСТИ СЕТОЧНЫХ МЕТОДОВ В ЗАДАЧАХ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ ЛЬДА

Исторически для численного моделирования ледовой среды исследователи сначала начали применять сеточные методы, ставшие основной для анализа механического поведения льда под нагрузкой, особенно в области пластического поведения при относительно невысоких скоростях деформации.

Метод конечных элементов (МКЭ, или Finite Element Method, FEM) широко распространен для решения задач МДТТ и является наиболее очевидным методом для моделирования взаимодействия льда с телами. Имеющийся на текущий момент опыт моделирования разрушения льда [1] предлагает несколько наиболее часто используемых решений: 1) использование технологии удаления отдельных разрушенных элементов (Element Erosion Technique, EET),

обладающей целым рядом упрощений и допущений. В EET ледовое поле моделируется как сплошное тело, для которого задаются законы деформирования и критерии разрушения. Разрушенные элементы удаляются из модели и не участвуют в последующем процессе взаимодействия, что, очевидно, приводит к нарушению законов сохранения и не может восприниматься как надежный метод для расчета параметров ледового воздействия на конструкцию. Графический пример расчетов с применением технологии удаления разрушенных элементов (EET) представлен на рис. 1 [1, 2].

2) использование расширенного метода конечных элементов (XFEM), позволяющего моделировать развитие трещин (повреждений) в теле в произвольном направлении вне зависимости от КЭ-сетки. На текущий момент имеется успешный опыт моделирования разрушения при помощи XFEM для таких материалов, как бетон и сталь [3], однако непосредственно для льда метод, вероятно, не применялся. К серьезным недостаткам метода XFEM относится слабая сходимость решения при наличии большого количества повреждений (трещин), что не может в полной мере быть использовано при моделировании хрупкого разрушения льда, для которого характерна интенсивное нарушение сплошности [3].

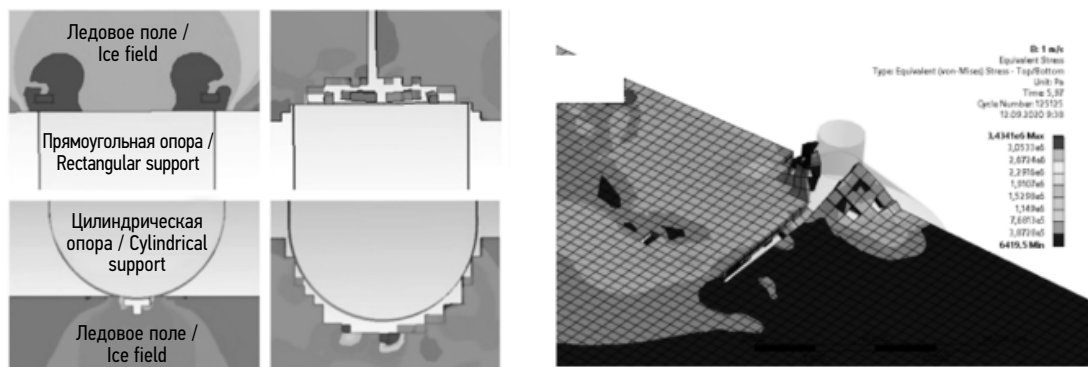


Рис. 1. Моделирование внедрения опоры сооружения в ледовое поле с применением технологии удаления разрушенных элементов (EET), по материалам [1, 2].

Fig. 1. Model of the structure support incorporation into an ice floe using the Exploded Element Removal (EET) technology based on materials from [1, 2].

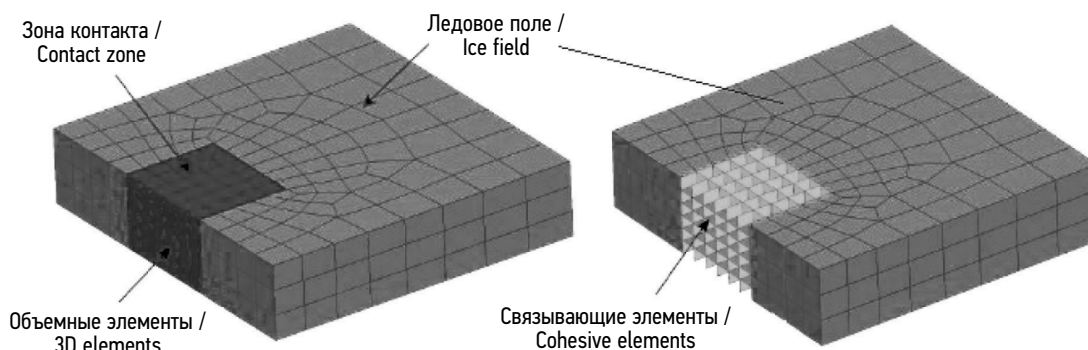


Рис. 2. Фрагмент КЭ-модели ледового поля с использованием метода сцепляющихся элементов [6, 7].

Fig. 2. Fragment of the finite element model of an ice floe built using the finite element method (FEM) [6, 7].

Метод сцепляющихся (когезионных) элементов (МСЭ, Cohesive Zone Elements, CZM), нашедший применение в области механики хрупкого разрушения для моделирования процессов возникновения и распространения трещин в деформируемых твердых телах [4, 5].

В задачах ледовой механики в МСЭ-подходе сплошное ледовое поле строится в КЭ-постановке и состоит из основных (bulk) и вспомогательных (связывающих, cohesive) элементов (см. рис. 2) [6, 7]. В качестве основных элементов принимается сплошное ледовое поле, разбитое на n конечных элементов. Связывающие элементы в модели ледового поля выполняют роль трещин. При достижении критических напряжений трещины раскрываются путем удаления соответствующих когезионных элементов. В отличие от рассмотренных выше методов, в CZM-постановке разрушенные элементы не удаляются из модели, а, наоборот, присутствуют в ней в виде ледовых обломков, взаимодействующих с сооружением и между собой. Таким образом, одним из важнейших аспектов CZM-модели является учет процесса перехода сплошного ледового образования при его разрушении к дискретному (образование фрагментов льда).

К настоящему времени метод CZM нашел достаточно широкое применение в задачах численного моделирования взаимодействия льда с различными сооружениями и конструкциями (рис. 3). В работе [6] выполнено численное моделирование взаимодействия лопасти гребного винта со льдом на режиме фрезерования (прорезания) льда. В серии работ авторов [7] и др. проведено численное моделирование разрушения ледового поля при движении судна во льдах. В работе [8] моделировалось взаимодействие ледового поля с маяком Norströmsgrund. Работа [9] посвящена результатам моделирования ледовых воздействий на вертикальную колонну с применением методологии сцепляющихся элементов (CZM) (см. рис. 3).

Следует отметить, что в ходе моделирования указанных выше задач в режиме реального времени получены «физические» картины разрушения ледового поля в процессе его взаимодействия с конструкций, а также, в целом, удовлетворительные зависимости глобальных ледовых нагрузок от времени. Указанные обстоятельства

говорят в пользу технологии (метода) сцепляющихся элементов (CZM) как об инструменте, способном с высокой степенью достоверности моделировать ледовые воздействия. К недостаткам метода можно отнести сеточную зависимость, а также возможность распространения трещин только в плоскостях когезионных элементов.

ВОЗМОЖНОСТИ БЕССЕТОЧНЫХ МЕТОДОВ В ЗАДАЧАХ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ ЛЬДА

В отличие от традиционных сеточных методов (МКЭ), бессеточные методы в настоящее время находятся лишь на начальном этапе полномасштабного внедрения в программные комплексы численного моделирования и по этой причине пока не достигли присущей МКЭ степени проработки. Несмотря на их значительный потенциал в моделировании разрушения и скоростного контактного взаимодействия, многие аспекты бессеточных методов (такие как численная стабильность, возможность использования специализированных решателей и технологий моделирования) требуют дальнейшего исследования и улучшения. В настоящее время бессеточные методы, безусловно, являются перспективным вектором развития, однако пока что не обладают столь же обширной верификационной базой, как сеточные методы, что ограничивает их широкое использование в инженерной практике [10].

Гидродинамика сглаженных частиц (Smooth Particle Hydrodynamics, SPH) представляет собой бессеточный метод, в котором среда заменяется набором частиц, между которыми распределены параметры среды. Указанные частицы среды имеют пространственное расстояние (т.н. длину сглаживания), на котором их свойства сглаживаются функцией ядра. Это означает, что любая физическая величина любой частицы может быть получена суммированием соответствующих величин всех частиц, находящихся в пределах действия их сглаженных длин.

Как следует из названия, SPH широко применяется в вычислительной гидродинамике, однако в настоящее

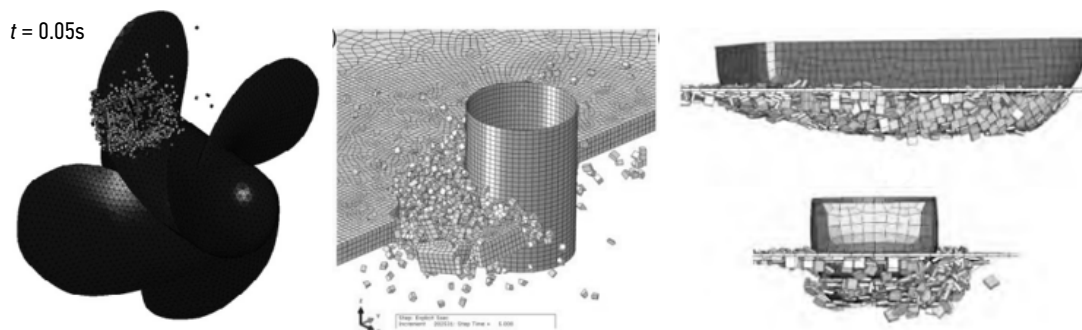


Рис. 3. Примеры использования МСЭ для численного моделирования взаимодействия льда с лопастями ГВ [6], опоры сооружения [8, 9], корпуса судна [7].

Fig. 3. Cases of FEM utilization for numerical modeling of ice interaction with the blades of a main propeller [6], structure support [8, 9], and the vessel hull [7].

время активно ведутся работы по адаптации метода для МДТТ, в первую очередь применительно к задачам хрупкого разрушения [11, 12]. Метод позволяет моделировать развитые деформации и разрушения среды путем разделения скопления частиц. В [13] представлены решения задач хрупкого разрушения образцов льда при изгибе и сжатии, а также выполнено прогрессирующее разрушение ледяной балки о препятствие и разрушение равномерного ледяного покрова при прохождении судна с разными скоростями (без учета водной среды). В работе [14] выполнено численное моделирование взаимодействия цилиндрической колонны (гладкой, с цилиндрическими и кольцевой наделками) с ровным ледовым полем в SPH-постановке (см. рис 4).

Основные достоинства SPH [10] заключаются в фактическом отсутствии КЭ-сетки и, как следствие, сеточной независимости результатов расчетов. В SPH пути разрушения льда возникают естественным образом, а наличие начального дефекта (трещины), как в сеточных методах, не требуется. При этом, хотя качественная картина разрушения не зависит от конфигурации частиц, минимальные размеры осколков льда зависят от их размеров, т.е. от степени дискретизации расчетной области. Отмечается [10, 14], что главным недостатком SPH-метода является нестабильность растяжения, при которой разрушение происходит не по физическим критериям, а из-за «потери видимости» друг друга соседними частицами вследствие больших деформаций среды. Также в SPH имеется проблема строгого удовлетворения граничных условий (ГУ) [10, 14]. Помимо этого, SPH подвержен наличию «паразитных» собственных колебаний с нулевой энергией, что является следствием аппроксимации как значений поля, так и его производных в одних и тех же точках [10, 14]. Таким образом, приложения метода SPH к механике твердых тел до сих пор остается относительно неисследованной областью знаний.

В целом, метод SPH больше направлен на моделирование водной среды. В ряде работ [15–17] лед в SPH-постановке рассматривается как упругий объект, движущийся по поверхности воды. Можно сделать вывод, что метод гидродинамики сглаженных частиц (SPH)

лучше всего подходит для крупномасштабного исследования, анализа переноса больших масс льда, оценки давления жидкости на ледяной покров и т.д., т.е. в задачах, в которых не требуется непосредственное рассмотрение локальной деформации и разрушения льда.

Метод сглаженных частиц Галеркина (Smoothed Particle Galerkin, SPG), также известный как метод частиц с физическим механизмом разрушения, хорошо зарекомендовал себя при описании больших деформаций, разрушения и дефрагментации материалов [10]. В методе SPG была предпринята попытка преодолеть ограничения, наложенные на применение метода SPH для моделирования разрушения твердых тел. При моделировании разрушения материала в отличие от традиционных сеточных методов (МКЭ и его модификаций) в расчетной модели выполняются все законы сохранения (масса, импульс, энергия), что является необходимым для корректного описания процессов деформирования и разрушения среды. Критерий разрушения (т.е. нарушения связи между частицами среды) может быть определен непосредственно в рамках конститутивной модели материала (в виде функции напряжений, деформаций, уровня накопленных повреждений и др.). Математический и численный анализ показал, что метод SPG является устойчивым и сходящимся при моделировании быстропротекающего интенсивного разрушения материалов [18–20].

На сегодняшний день метод SPG успешно применяется для анализа пробития и высокоскоростного ударного воздействия на бетонные и металлические мишени, моделирования механической обработки металлов (шлифование, резание, сверление трением), прогрессирующего разрушения металлических и бетонных конструкций и т.д., т.е. в задачах, где требуется непосредственное физическое моделирование интенсивного разрушения и дефрагментации материала [18–20], что делает весьма перспективным использование указанного метода в прикладных задачах механики льда. Количество работ по использованию метода SPG для моделирования разрушения льда и расчета ледовых воздействий на сооружения на текущий момент весьма незначительно.

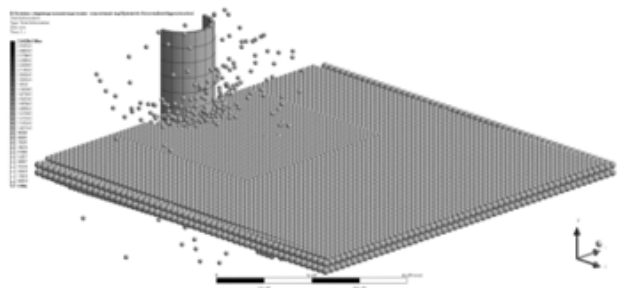
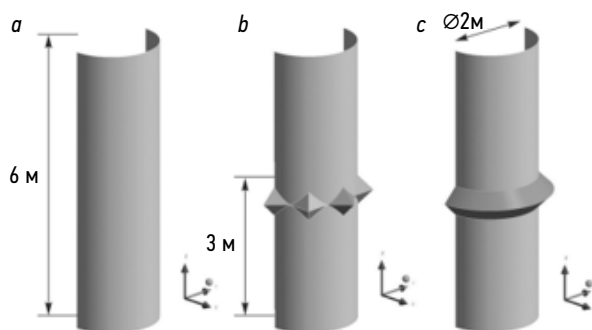


Рис. 4. Численное моделирование взаимодействия опорной колонны с ровным ледовым полем методом SPH, по материалам работы [14].

Fig. 4. Numerical model of pillar support interaction with a flat ice floe using the SPH method based on materials from [14].

В работе [21] выполнено численное моделирование взаимодействия ледового поля и опорной колонны, полученных с помощью методов SPH и SPG, однако сопоставление результатов расчета показало значительные расхождения в значениях. В то же время, в работе [22] на основе метода SPG выполнено моделирование разрушения ледового образца при одноосном сжатии, а также столкновение корпуса полярного судна с ледовым полем, см. рис. 5 ниже. В представленной работе [22] отмечается «согласованность результатов численного моделирования с экспериментом», что, в целом, говорит о возможности применения указанного метода для моделирования силового взаимодействия льда с деталями и конструкциями ледостойких сооружений, однако на текущий момент в первую очередь требуются дополнительные исследования по адаптации метода SPG применительно к задачам хрупкого разрушения.

Метод дискретных элементов (Discrete Element Method, DEM), помимо SPH и SPG, является другим бессеточным методом, применяемым для анализа хрупкого разрушения. В DEM-подходе физическое состояние системы складывается из физического состояния входящих в нее дискретных элементов [23]. Совокупность всех элементов образует исследуемую среду, но каждый дискретный элемент является независимым и определенный образом взаимодействует с соседними элементами. Общее (макроскопическое) состояние/поведение системы является результатом взаимодействия отдельных (дискретных)

частиц. Изначально DEM был разработан для численного решения задач молекулярной динамики, но впоследствии был адаптирован для исследования динамики горных пород [23]. Теоретические основы метода DEM представлены в работе [24]. В настоящее время метод DEM активно применяется для моделирования сыпучих (гранулированных) сред [25]. Метод дискретных элементов наследует все преимущества бессеточных методов, а именно: DEM хорошо адаптирован для описания быстротекущих процессов, связанных с переносом вещества [23]. Указанные процессы оказалось легче описать в виде, когда каждая частица имеет отдельное физическое состояние, а эволюция всей среды (системы) обусловлена локальными физическими взаимодействиями между ее отдельными элементами.

Применение DEM для моделирования непрерывных (сплошных) сред потребовало выработки специальных подходов, нетипичных для исходного метода. Как результат, метод дискретных элементов был дополнен моделями связей в виде балок, соединяющих элементы [23, 26] (рис. 6, а). Связь между частицами представляет собой виртуальную балку, ограничивающую тангенциальное и нормальное смещение частиц относительно друг друга. Разрыв связи между частицами происходит при достижении заданных критических условий, после разрыва связи частицы сохраняются в расчетной модели и продолжают взаимодействовать как независимые твердые тела [23, 24, 26].

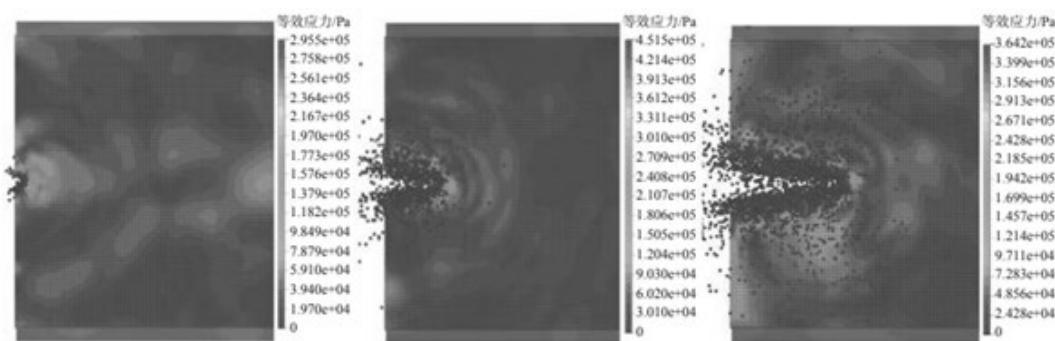


Рис. 5. Численное моделирование столкновения корпуса полярного судна с ледовым полем методом SPG (вид сверху). Распределение эквивалентных напряжений в ледовом блоке в различные моменты времени [22].

Fig. 5. Numerical model of the polar ship hull collision with an ice floe using the SPG method (top view). Equivalent stress distribution in an ice block at different time [22].

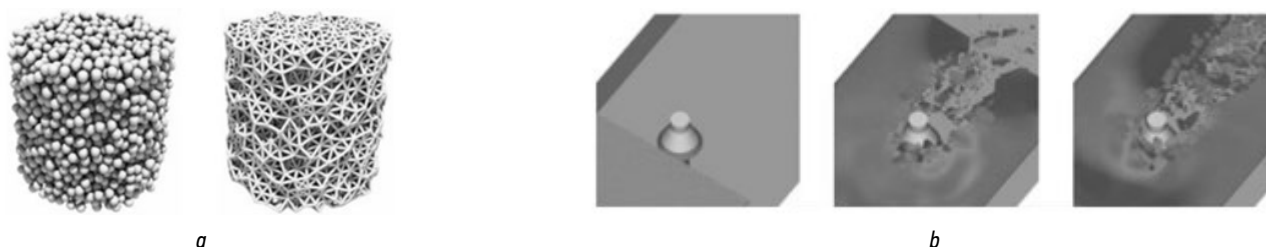


Рис. 6. Численное моделирование методов дискретных элементов: а — дискретные элементы и визуализация балочных связей между ними [23]; б — моделирование массивных льдин, воздействующих на опоры шельфовых установок [28].

Fig. 6. Numerical modeling using discrete element methods: a, discrete elements and visualization of tie beams between them [23]; b, modeling of massive ice floes impacting the supports of offshore installations [28].

На основе модифицированной модели DEM в настоящее время предпринимаются попытки построить численные модели льда. Работа [27] является одной из первых работ по оценке применимости DEM для моделирования льда, в которой выполнено моделирование одноосного сжатия и изгиба простейших образцов морского льда в трехмерной постановке. Впоследствии откалиброванные мезопараметры материала распространены на модели массивных льдин, воздействующих на опоры шельфовых установок (рис. 6, б) [28]. Метод DEM подходит для моделирования льдин с учетом того, что он особенно эффективен при независимом движении большого числа элементов. Причем геометрическая форма дискретных элементов необязательно должна представлять собой сферу, как на рис. 6, что является простейшим случаем. Имеется возможность формирования двумерных/трехмерных осколков льда случайных размеров в заданных пределах [23, 24].

В работах [28–30] выполнено численное моделирование ледового сопротивления судна с использованием DEM-подхода, см. рисунок 7, и в режиме реального времени получены зависимости ледовых сил от скорости. Отмечается, что моделирование ледового сопротивления судна с применением DEM-методологии эффективно при исследовании зависимости пропульсивных характеристик от скорости движения (скорости взаимодействия со льдом) и толщины льда [30]. В целом ряде работ [31–34] в рамках методологии DEM представлено моделирование ледового покрова, его растрескивание и раскалывание, силовое воздействие на судно или опоры.

Как видно из данных приведенных работ, использование методологии DEM особенно эффективно и перспективно в моделировании механики льда, но на текущий момент разработка данного направления только начинается. Отмечается [23], что является возможным использование нескольких методов в единой модели: МДЭ — для моделирования хрупкого разрушения льда и МКЭ — для анализа НДС конструкций, на которые воздействует лед. Указанное обстоятельство позволяет одновременно решать проблемы внешних сил и внутренних усилий в рамках единой вычислительной модели.

К основным недостаткам метода можно отнести чувствительность механизма разрушения льда к таким

параметрам частиц, как их диаметр (в особенности отношение характерного размера ледового образца к размеру частиц), а также сложности определения нормальной и сдвиговой жесткости, прочности сцепления частиц на растяжение и сдвиг.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА СГЛАЖЕННЫХ ЧАСТИЦ (SPG)

По результатам представленного выше обзора и анализа существующих численных методов МДТТ, одним из наиболее перспективных непосредственно в задачах деформирования и разрушения ледовой среды является метод сглаженных частиц (SPG) [18–20]. Разработанный в 2015 г., он является естественным развитием численных методов механики деформируемого твердого тела. Основные положения метода SPG, а также возможности его приложения в задачах прикладной механики льда содержатся в работах авторов [35, 36].

Задача механики сплошной среды для тела объемом Ω и ограниченного поверхностью Γ в перемещениях $u(x)$ (рис. 8) записывается в виде:

- уравнений равновесия в объеме:

$$F(u) + b = \rho \ddot{u} + c \dot{u} \text{ в объеме } \Omega ; \quad (1)$$

- кинематических граничных условий (ГУ) на части поверхности Γ_u :

$$u - \bar{u} = 0 \text{ на } \Gamma_u ; \quad (2)$$

- силовых граничных условий (ГУ) на части поверхности Γ_f :

$$\sigma \cdot n_v - \bar{f} = 0 \text{ на } \Gamma_f ; \quad (3)$$

- начальных условий (НУ):

$$u|_{t_0} = u_0 \text{ в области } \Omega ; \quad (4)$$

$$\dot{u}|_{t_0} = v_0 \text{ в области } \Omega , \quad (5)$$

где $F(u)$ — вектор внутренних реакций деформируемой среды; b — вектор внешних сил; u' , u'' — векторы скоростей и ускорений соответственно; ρ — плотность

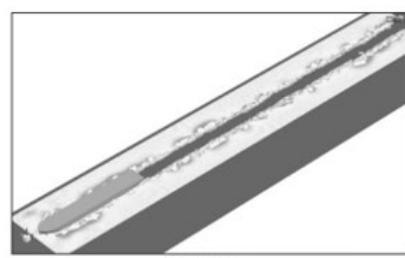
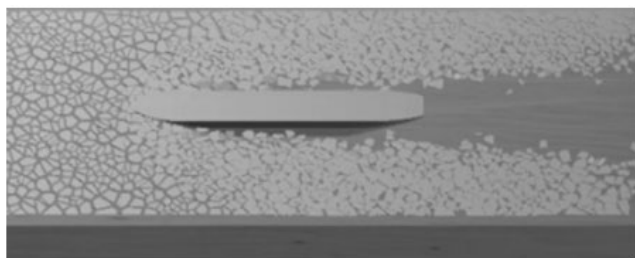


Рис. 7. Численное моделирование методом дискретных элементов ледового сопротивления судна в битом льду и прокладка канала ледоколом в сплошном льду [28–30].

Fig. 7. Numerical modeling of ship ice resistance in small floes using the discrete element method and icebreaker channeling in solid ice [28–30].

объема материала; c — коэффициент демпфирования; \tilde{u} — заданные перемещения; \tilde{f} — заданная интенсивность поверхностных сил; n_ν — направляющие косинусы; σ — вектор напряжений; u_0 — заданные начальные перемещения; v_0 — заданная начальная скорость.

Приближенное решение задачи численными вариационно-разностными процедурами связано с аппроксимацией поля искомой функции $u(x)$ с помощью набора функций формы, зависящих от конечного числа основных неизвестных параметров. Эта аппроксимация используется для приведения путем дискретизации дифференциального уравнения (1), граничных условий (2), (3) и начальных условий (4), (5) к набору систем алгебраических уравнений относительно основных неизвестных задачи.

Опорным объектом дискретизации бессеточного метода является узел. Взаимодействие между узлами, определяемое функциями формы, зависит только от взаимного положения узлов. Узлы наносятся внутри области Ω и на границе Γ , в том числе на частях границы Γ_u и Γ_f (рис. 8). Векторы x и ξ содержат координаты произвольных точек тела, вектор x_i указывает на узел.

Основными характерными компонентами бессеточного метода являются: построение аппроксимации решения с помощью функций формы; построение дискретной формы уравнения равновесия; построение дискретной формы граничных и начальных условий [35, 36].

Построение аппроксимации решения с помощью функций формы

Общее поле перемещений $u(x)$ аппроксимируется конечным набором узловых параметров d_i с помощью некоторого набора координатных функций, определенных на всей области или на подобласти Ω (в зависимости от варианта численной процедуры):

$$u(x) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \cdot d_i, \tag{6}$$

где N — общее количество узловых параметров; $\phi_i(x)$ — координатная функция или функция формы; d_i — узловые параметры в точке x_i .

В бессеточном методе для построения гладкого аппроксимирующего поля перемещений через узловые параметры $d_i = d_i(x)$ применяется интегральное преобразование — свертка с использованием функции ядра ω (оконная или весовая функция):

$$u(x) = \int_{\Omega} \omega(x - \xi, \gamma) \cdot d(\xi) d\Omega. \tag{7}$$

Уравнение (7) устанавливает, что перемещение в некоторой фиксированной точке x принимается как функция параметров перемещений окружающих точек ξ .

Построение дискретной формы уравнения равновесия

Построение разрешающей системы уравнений выполняется с помощью минимизации невязки $R_s(u(x))$, полученной из уравнения (1) при подстановке в него аппроксимации поля перемещений в форме (6):

$$R_s \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) \cdot d_i \right) = F(u) + b - \rho \ddot{u} - c \dot{u}. \tag{8}$$

Минимизация достигается путем ортогонализации невязки по отношению к весовым функциям ядра ω :

$$\int_{\Omega} \omega_I(x) \cdot R_s \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) \cdot d_i \right) d\Omega = 0, \tag{9}$$

где $I=1, \dots, N$. Здесь $\omega_I(x)$ — весовая функция ядра для узла I . Интегрирование выполняется численно методом Гаусса по узловым точкам.

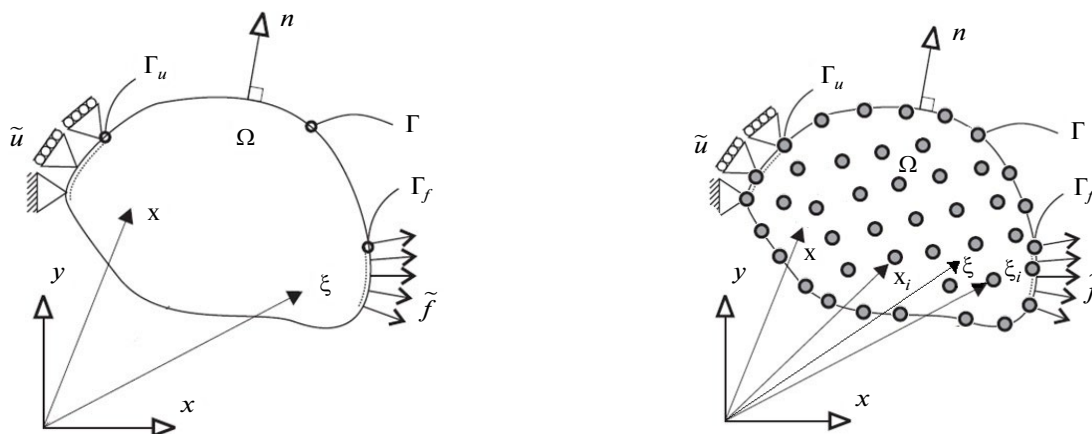


Рис. 8. Расчетная модель бессеточного метода задачи механики деформируемого твердого тела, по материалам работ авторов [35, 36].
Fig. 8. A computational meshless model to solve the solids mechanics problem based on materials from [35, 36].

Построение дискретной формы граничных условий (ГУ)

Невязка от ограничения по перемещениям, получаемая в результате подстановки в уравнение (2) аппроксимации поля перемещений (6), имеет вид:

$$R_u \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) \cdot d_i \right) = u - \bar{u}. \quad (10)$$

Ее ортогонализация весовыми функциями ядра ω дает соотношение:

$$\int_{\Gamma} \omega_I(x) R_u \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) \cdot d_i \right) d\Gamma = 0, \quad (11)$$

где $I=1, \dots, N$. Здесь $\omega_I(x)$ — весовая функция ядра для узла I . Интегрирование выполняется численно по узловым точкам.

Для получения системы разрешающих уравнений условия (10) и (11) объединяют, умножая второе слагаемое на штрафной коэффициент α :

$$\int_{\Omega} \omega_I(x) \cdot R_u \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) d_i \right) d\Omega + \alpha \int_{\Gamma} \omega_I(x) \cdot R_u \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) d_i \right) d\Gamma = 0. \quad (12)$$

Учет нелинейных и динамических эффектов

Нелинейное поведение тела при деформировании, которое связано с локальным нарушением целостности, изменением физических свойств материала и большими деформациями, приводит к необходимости решения нелинейной системы алгебраических уравнений относительно узловых параметров d_i . Здесь, как и в известных численных процедурах, используются итерационные методы, например, метод Ньютона-Рафсона.

Моделирование локального разрушения материала реализуется в результате разрыва связи между соседними узлами путем обнуления пересекающихся функций формы при достижении на некоторой итерации заданного феноменологического критерия разрушения (например, превышение деформации критического значения).

Решение нестационарной динамической задачи с помощью численных процедур требует проведения не только рассмотренной пространственной дискретизации, но и временной. В бессеточных методах, также, как и в методе конечных элементов (МКЭ), используется разделение переменных, т.е.:

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \cdot d_i(t). \quad (13)$$

Дискретизация по времени узловых параметров проводится с помощью метода центральных разностей (МЦР), возможно также применение и других процедур, например, метода Ньюмарка.

РАЗРАБОТКА И АПРОБАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ЛЬДА

На базе метода сглаженных частиц (SPG) и современных подходах механики повреждаемых сред авторами разработана математическая модель, способная описывать (воспроизводить) механическое поведение льда в широком диапазоне изменения внешних воздействий [35, 36]. В качестве модели материала (льда) используется феноменологическая модель динамического разрушения Джонсона-Холмквиста (сокращенно JH-2 модель) [37, 38].

Численное моделирование механических испытаний в квазистатическом режиме

В рамках разработанной модели проведено численное моделирование механических испытаний ледовых образцов в квазистатическом режиме, что позволило исследовать процессы деформации и разрушения льда при низких скоростях нагружения, рис. 9. Моделирование в этом режиме было выполнено для воспроизведения условий, в которых инерционные эффекты минимальны, а развитие напряжений и деформаций происходит постепенно [35, 36].

При низких скоростях нагружения $v < 1$ мм/с лед проявляет способность к медленному накоплению повреждений и развитию микротрещин. При продолжительном квазистатическом нагружении может наблюдаться вязкое разрушение — процесс, при котором трещины в ледовой среде развиваются медленно, а разрушение происходит не мгновенно, а с задержкой, под воздействием постоянного напряжения. В этом режиме разрушение льда имеет плавный характер и связано с процессами ползучести, релаксации напряжений и перераспределения нагрузок в материале.

При увеличении скорости нагружения $v > 1$ мм/с ледовая среда переходит от вязкопластического поведения к хрупкому режиму разрушения. В этом режиме деформации не успевают релаксировать, что приводит к быстрому нарастанию напряжений и внезапному образованию трещин. Хрупкий режим разрушения характеризуется резким и катастрофическим развитием трещин, что значительно снижает способность льда выдерживать нагружение и ускоряет процесс его разрушения.

Характерные кривые деформирования для хрупкого режима разрушения представлены на рис. 9, а. Можно видеть, что в условиях квази-статичности зависимость, в основном, линейная и разрушение происходит практически мгновенно при достижении критического напряжения. При этом в процессе нагружения наблюдается многократная силовая разгрузка образца, связанная с зарождением (инициализацией), накоплением и последующим распространением повреждений (выделено черным на рис. 9). Фрагмент процесса распространения

повреждений при квазистатическом нагружении представлен на рис. 9, *b*. Можно видеть, что повреждения в образце прорастают вертикально, а разрушение сопровождается образованием магистральных, раскалывающих образец трещин, что подтверждается экспериментальными исследованиями [35, 36].

Численное моделирование механических испытаний в динамическом режиме

При динамическом нагружении ($v=1$ м/с) ледовая среда испытывает значительные инерционные эффекты, что ускоряет процесс разрушения. В зоне хрупкого разрушения лед практически не проявляет пластических деформаций, а трещинообразование происходит резко и распространяется с высокой скоростью, рисунок 10. Это приводит к хрупкому отколу больших фрагментов материала. В отличие от квазистатического режима, при динамическом воздействии лед не успевает перераспределить напряжения, что делает его менее устойчивым к разрушению и вызывает внезапные структурные изменения.

Можно видеть (рис. 10, *a*), что в отличие от квазистатического режима при динамическом сжатии образец не претерпевает полного разрушения, а, наоборот, имеет значительную несущую способность даже после достижения критического напряжения. Фрагмент процесса распространения повреждений при динамическом нагружении представлен на рис. 10, *b*. Можно видеть, что повреждения в образце инициализируются и распространяются уже в докритическом состоянии. При этом фронт разрушения зарождается на поверхности контакта образца с движущейся плитой, и распространяется вглубь

материала. Раздробленный лед вытесняется за пределы сжимающей плиты. Перечисленные ключевые особенности механического поведения ледовой среды в условиях скоростного нагружения подтверждаются экспериментальными исследованиями [35, 36].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе представлен обзор и обобщение ключевых работ по применению численного моделирования в задачах прикладной механики льда, проанализированы достоинства и недостатки современных численных методов, а также обозначены границы их применимости. По результатам проведенных исследований, авторами предложена математическая модель механического поведения льда, разработанная на базе парадигмы бессеточных методов МДТТ (метод сглаженных частиц Галеркина, SPG). В качестве модели материала используется модель динамического разрушения Джонсона-Холмквиста (JH-2), способная феноменологически описывать механическое поведение льда в широком диапазоне изменения внешних воздействий. Предложенная математическая модель апробирована на базе стандартных механических испытаний ледовых образцов в квазистатическом и динамическом режимах нагружения. Полученные результаты численного моделирования качественно и количественно находятся в согласии с экспериментальными исследованиями, что свидетельствует о корректности и непротиворечивости разработанной численной модели. Указанная модель после более обширной апробации может найти применение для моделирования взаимодействия льда с деталями и конструкциями ледостойких сооружений и машин.

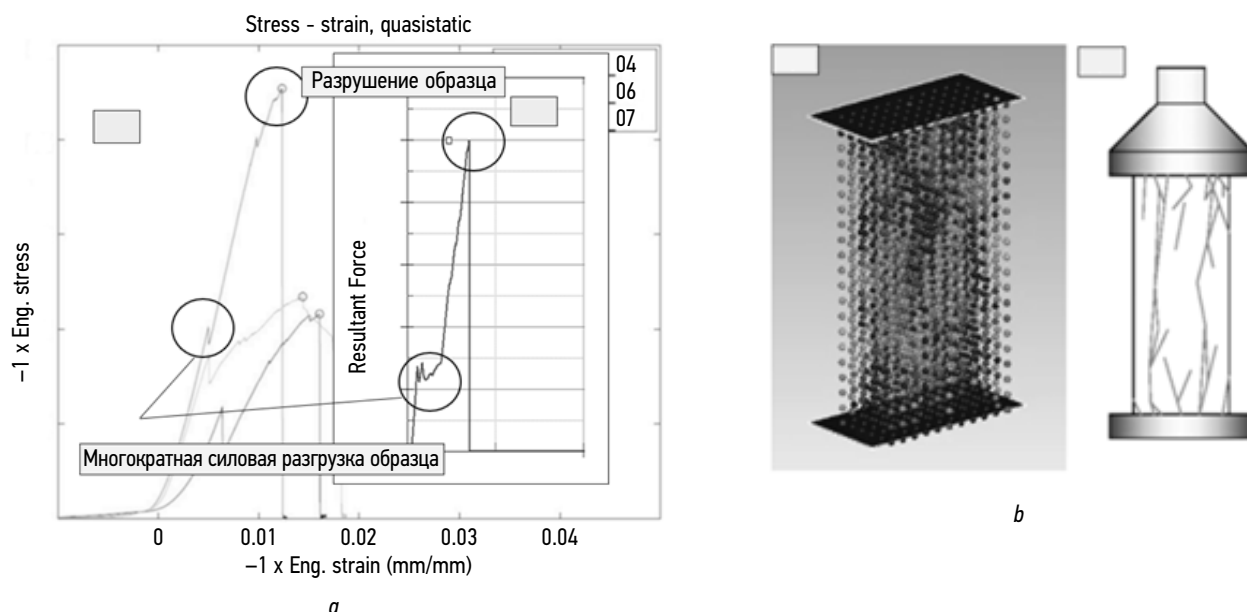


Рис. 9. Численное моделирование квазистатических испытаний на одноосное сжатие ($v=1$ см/с): *a* — кривые деформирования (зона хрупкого разрушения); *b* — характерная картина распространения повреждений, по материалам работ авторов [35, 36]. Метод SPG.

Fig. 9. Numerical modeling of quasi-static uniaxial compression tests ($v=1$ cm/s): *a*, deformation curves (brittle zone); *b*, typical pattern of damage propagation based on materials from [35, 36]. SPG method.

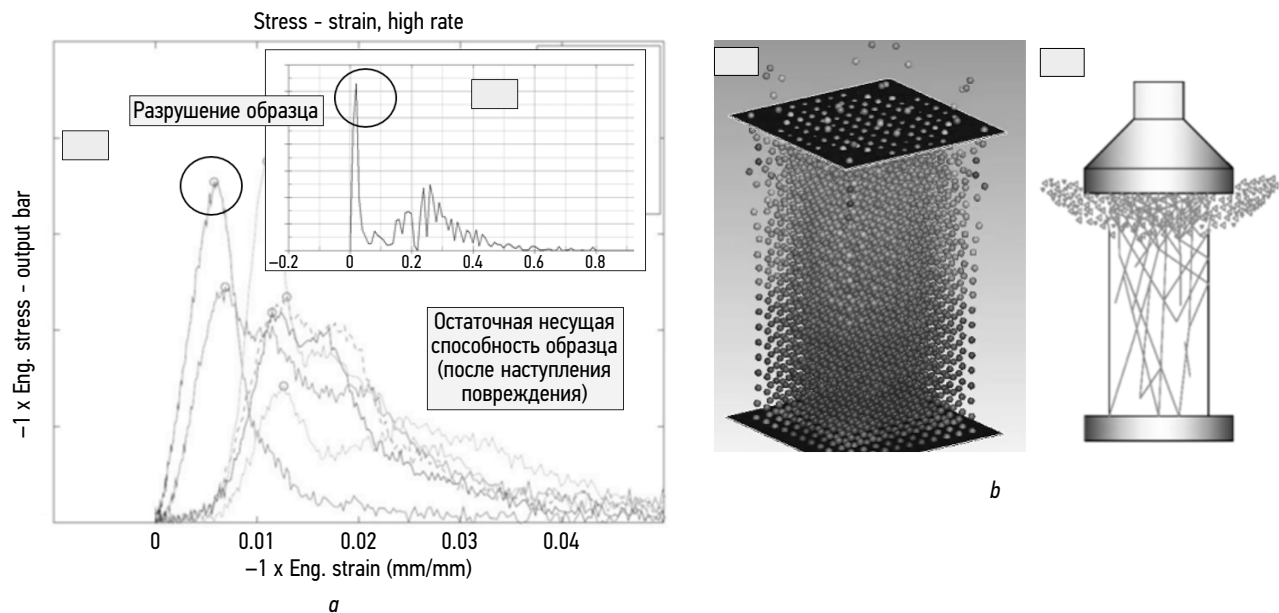


Рис. 10. Численное моделирование динамических испытаний на одноосное сжатие ($v=1$ м/с): *a* — кривые деформирования (зона хрупкого разрушения); *b* — характерная картина распространения повреждений, по материалам работ авторов [35, 36]. Метод SPG.

Fig. 10. Numerical modeling of dynamic uniaxial compression tests ($v=1$ m/s): *a*, deformation curves (brittle zone); *b*, typical pattern of damage propagation based on materials from [35, 36]. SPG method.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Вклад авторов. А.А. Родионов — редактирование текста рукописи; С.В. Рябушкин — написание текста рукописи. Все авторы одобрили рукопись (версию для публикации), а также согласились нести ответственность за все аспекты работы, гарантируя надлежащее рассмотрение и решение вопросов, связанных с точностью и добросовестностью любой её части.

Источники финансирования. Авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

Конфликт интересов. Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Генеративный искусственный интеллект. При создании настоящей статьи технологии генеративного искусственного интеллекта не использовали.

ADDITIONAL INFO

Author contributions: A.A. Rodionov: writing—review & editing; S.V. Ryabushkin: writing—original draft. All the authors approved the version of the manuscript to be published and agreed to be accountable for all aspects of the work, ensuring that questions related to the accuracy or integrity of any part of the work are appropriately investigated and resolved.

Funding sources: The study was not supported by any external sources.

Disclosure of interests: The authors have no explicit or potential conflicts of interests associated with the publication of this article.

Generative AI: No generative artificial intelligence technologies were used to prepare this article.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Политько В.А., Соломатин С.В., Каракозова А.И., Трусков П.А. Совершенствование методов расчета нагрузок от воздействия льда на гидротехнические сооружения // Вестник МГСУ. 2020. Т. 15. Вып. 5. С. 701–711. EDN: FDNHQC doi: 10.22227/1997-0935.2020.5.701-711
2. Gogoladze D.Z., Bekker A.T. Numerical Modeling of the Ice-Conical Structure Interaction Process Using Element Erosion Technique // IOP Conf. Series: Earth and Envir. Sci. 2022. Vol. 988. doi: 10.1088/1755-1315/988/5/052056
3. Cervera M., Barbat G.B., Chiumenti M., Wu J.-Y. Comparative Review of XFEM, Mixed FEM and Phase-Field Models for quasi-brittle cracking // Arch Computat Methods Eng. 2022. Vol. 29. P. 1009–1083. doi: 10.1007/s11831-021-09604-8
4. Mulmule S., Dempsey J. A viscoelastic fictitious crack model for the fracture of sea ice // Mechanics of Time-Dependent Materials. 1997. Vol. 1. P. 331–356. doi: 10.1023/A:1008063516422
5. Mulmule S., Dempsey J. Stress-Separation Curves for Saline Ice Using Fictitious Crack Model // Journal of Engineering Mechanics. 1997. Vol. 123, N. 8. P. 870–877. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1997)123:8(870)
6. Li Zhou, Feng Wang, Feng Diao, et al. Simulation of Ice-Propeller Collision with Cohesive Element Method // J. Mar. Sci. Eng. 2019. Vol. 7, N. 10. doi: 10.3390/jmse7100349
7. Коршунов В.А., Мудрик Р.С., Пономарев Д.А., Родионов А.А. Моделирование процессов разрушения льда с использованием методологии

- сцепляющихся элементов // Морские интеллектуальные технологии. 2019. Т. 1, № 4. С. 34–44. EDN: CUYXIY
8. Patil A., Sand B., Cwirzen A., Fransson L. Numerical prediction of ice rubble field loads on the Norströmsgrund lighthouse using cohesive element formulation // *Ocean Engineering*. 2021. Vol. 223, N. 14. doi: 10.1016/j.oceaneng.2021.108638
 9. Makarov A.O., Bekker A.T. Modelling of Ice Impacts Using Cohesive Element Method: Influence of Element Shape // *IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci.* 2021. Vol. 666. doi: 10.1088/1755-1315/666/3/032014
 10. Huerta A., Belytschko T., Fernandez-Mendez S., Rabczuk T. Meshfree Methods. In: *Encyclopedia of Computational Mechanics*. New York: John Wiley & Sons, 2004. Vol. 1. P. 279–309. doi: 10.1002/0470091355.ecm005
 11. Deb D., Pramanik R. Failure process of brittle rock using smoothed particle hydrodynamics // *Journal of Engineering Mechanics*. 2013. Vol. 139, N. 11. P. 1551–1565. doi: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000592
 12. Gray J.P., Monaghan J.J., Swift R.P. SPH elastic dynamics // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2001. Vol. 190 (49–50). P. 6641–6662. EDN: ARJXXB
 13. Zhang N., Zheng X., Ma Q. Updated Smoothed Particle Hydrodynamics for Simulating Bending and Compression Failure Progress of Ice // *Water*. 2017. Vol. 9, N. 11. P. 3–24. doi: 10.3390/w9110882
 14. Filatov A.R. Outlook for application of smooth particle hydrodynamics for numerical modeling of ice loads // *Transactions of the Krylov State Research Centre*. 2022. N. 2(400). P. 24–39. doi: 10.24937/2542-2324-2022-2-400-24-39
 15. Pan W., Tartakovsky A.M., Monaghan J.J. A smoothed-particle hydrodynamics model for ice-sheet and ice-shelf dynamics // *Journal of Glaciology*. 2012. Vol. 58(208). P. 216–222. doi: 10.3189/2012JoG11J084
 16. Staroszczyk R. SPH Modeling of Sea-ice Pack Dynamics // *Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics*. 2017. Vol. 64, N. 2. P. 115–137. doi: 10.1515/heem-2017-0008
 17. Shen H.T., Su J., Liu L. SPH Simulation of River Ice Dynamics // *Journal of Computational Physics*. 2000. Vol. 165, N. 2. P. 752–770. doi: 10.1006/jcph.2000.6639
 18. Wu Y., Hu W., Pan X., Wu C.T. Recent development of Smoothed Particle Galerkin (SPG) Method for Joint Modeling. In: *16th International LS-DYNA Users Conference*, 2020. Berkeley: ANSYS, 2020.
 19. Wu Y., Guo Y., Hu W. An Introduction to the LS-DYNA Smoothed Particle Galerkin Method for Severe Deformation and Failure Analyses in solids. In: *13th LS-DYNA Users Conference*, 2014. Berkeley: ANSYS, 2020.
 20. Wu Y., Wu C.T., Hu W. Parametric and convergence studies of the smoothed particle Galerkin (SPG) method in semi-brittle and ductile material failure analyses. In: *15th International LS-DYNA Users Conference*, 2018. Berkeley: ANSYS, 2020.
 21. Филатов А.Р. Численное моделирование ледовых нагрузок бессеточными методами SPH и SPG // *Труды Крыловского государственного научного центра*. 2022. С. 7–10. EDN: TVIADE doi: 10.24937/2542-2324-2022-1-S-1-7-10
 22. Tong Z. et al. Simulation analysis on collision performance of polar cruise vessel based on JH-2 sea ice mod-el // *Chinese Journal of Ship Research*. 2021. Vol. 16, N. 5. P. 87–94.
 23. Гриневич Д.В. Обзор применения численных методов для моделирования деформации и разрушения льда // *Труды ВИАМ*. 2020. №8 (90). С. 109–122. EDN: WQNHTP doi: 10.18577/2307-6046-2020-0-8-109-122
 24. Williams J.R. et al. The Theoretical Basis of the Discrete Element Method. In: *Proceedings from Conference Numerical Methods of Engineering, Theory and Applications*. 1985. P. 897–906.
 25. Cundall P.A., Strack O.D.L. A discrete numerical model for granular assemblies // *Géotechnique*. 1979. N. 29(1). P. 47–65. doi: 10.1680/geot.1979.29.1.47
 26. Potyondy D.O., Cundall P.A. A bonded-particle model for rock // *Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2004. Vol. 41, N. 8. P. 1329–1364. doi: 10.1016/j.ijrmms.2004.09.011
 27. Ji S., Di S., Long X. DEM Simulation of Uniaxial Compressive and Flexural Strength of Sea Ice: Parametric Study // *Journal of Engineering Mechanics*. 2017. Vol. 143, N. 1. P. 4–11. doi: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000996
 28. Ji S. Discrete Element Modeling of Ice Loads on Ship and Offshore Structures. In: Li, X., Feng, Y., Mustoe, G. (eds) *Proceedings of the 7th International Conference on Discrete Element Methods. DEM 2016. Springer Proceedings in Physics*. Singapore: Springer, 2017. Vol. 188. doi: 10.1007/978-981-10-1926-5_6
 29. Jou O., Celigueta M.A. A bonded discrete element method for modeling ship-ice interactions in broken and unbroken sea ice fields // *Comp. Part. Mech.* 2019. Vol. 6, N. 6. P. 739–765, doi: 10.1007/s40571-019-00259-8
 30. Hu B., Liu L., Wang Dy, et al. GPU-Based DEM Simulations of Global Ice Resistance on Ship Hull During Navigation in Level Ice // *China Ocean. Eng.* 2021. Vol. 35. P. 228–237. doi: 10.1007/s13344-021-0020-5
 31. Hissette Q., Alekseev A., Seidel J. Discrete Element Simulation of Ship Breaking Through Ice Ridges. In: *Proceedings from the 27th International Ocean and Polar Engineering Conference*. San Francisco: ISOPE, 2017. P. 1–15.
 32. Neto A.V. Improvement of Rubble Ice Generation in Numerical Simulation of Ice Ridge and Structure Interaction. [Master thesis] Liège, 2017.
 33. Polojärvi A. Sea ice ridge keel punch through experiments: model experiments and numerical modeling with discrete and combined finite-discrete element methods [Doctoral theses] Espoo, 2013.
 34. Tuhkuri J., Polojärvi A. A review of discrete element simulation of ice-structure interaction // *Philosophical transactions. Series A: Mathematical, physical, and engineering sciences*. 2018. Vol. 376, N. 2129. doi: 10.1098/rsta.2017.0335
 35. Родионов А.А., Рябушкин С.В. Использование бессеточных процедур для численного моделирования механического поведения льда в широком диапазоне внешних воздействий // *Морские интеллектуальные технологии*. 2024. № 3-2(65). С. 83–94. EDN: GJPHAD doi: 10.37220/MIT.2024.65.3.011
 36. Родионов А.А., Рябушкин С.В. Численное моделирование механического поведения льда при квазистатических и динамических нагрузках // *Морские интеллектуальные технологии*. 2023. № 4-2. С. 99–105. EDN: KSEFLM doi: 10.37220/MIT.2023.62.4.051
 37. Johnson G.R., Holmquist T.J. An improved computational constitutive model for brittle materials // *AIP Conf. Proc.* 1994. Vol. 309. P. 981–984. doi: 10.1063/1.46199
 38. Gazonas G. Implementation of Johnson-Holmquist II (JH-2) Constitutive Model into DYNA3D. Aberdeen: Army Research Laboratory, 2002.

REFERENCES

1. Politko VA, Solomatin SV, Karakozova AI, Truskov PA. Improving calculation methods taking into account the impact of ice on hydraulic structures. *Vestnik MGSU*. 2020;15(5):701–711. (In Russ.) EDN: FDNHQC doi: 10.22227/1997-0935.2020.5.701-711
2. Gogoladze DZ, Bekker AT. Numerical Modeling of the Ice-Conical Structure Interaction Process Using Element Erosion Technique. *IOP Conf. Series: Earth and Envir. Sci.* 2022;988. doi: 10.1088/1755-1315/988/5/052056
3. Cervera M, Barbat GB, Chiumenti M, Wu J-Y. Comparative Review of XFEM, Mixed FEM and Phase-Field Models for quasi-brittle cracking. *Arch Computat Methods Eng.* 2022;29:1009–1083. doi: 10.1007/s11831-021-09604-8
4. Mulmule S, Dempsey J. A viscoelastic fictitious crack model for the fracture of sea ice. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 1997;1:331–356. doi: 10.1023/A:1008063516422
5. Mulmule S, Dempsey J. Stress-Separation Curves for Saline Ice Using Fictitious Crack Model. *Journal of Engineering Mechanics*. 1997;123(8):870–877. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1997)123:8(870)
6. Li Zhou, Feng Wang, Feng Diao, et al. Simulation of Ice-Propeller Collision with Cohesive Element Method. *J. Mar. Sci. Eng.* 2019;7(10). doi: 10.3390/jmse7100349
7. Korshunov VA, Mudrik RS, Ponomarev DA, Rodionov AA. Modeling of ice destruction processes using the methodology of interlocking elements. *Morskije intellektualnye tekhnologii*. 2019;1(4):34–44. (In Russ.) EDN: CUYXIY
8. Patil A, Sand B, Cwirzen A, Fransson L. Numerical prediction of ice rubble field loads on the Norströmsgrund lighthouse using cohesive element formulation. *Ocean Engineering*. 2021;223(14). doi: 10.1016/j.oceaneng.2021.108638

9. Makarov AO, Bekker AT. Modelling of Ice Impacts Using Cohesive Element Method: Influence of Element Shape. *IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci.* 2021;666. doi: 10.1088/1755-1315/666/3/032014
10. Huerta A, Belytschko T, Fernandez-Mendez S, Rabczuk T. *Meshfree Methods. In: Encyclopedia of Computational Mechanics.* New York: John Wiley & Sons; 2004;1:279–309. doi: 10.1002/0470091355.ecm005
11. Deb D, Pramanik R. Failure process of brittle rock using smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Engineering Mechanics.* 2013;139(11):1551–1565. doi: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000592
12. Gray JP, Monaghan JJ, Swift RP. SPH elastic dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 2001;190(49–50):6641–6662. EDN: ARJXJB
13. Zhang N, Zheng X, Ma Q. Updated Smoothed Particle Hydrodynamics for Simulating Bending and Compression Failure Progress of Ice. *Water.* 2017;9(11):3–24. doi: 10.3390/w9110882
14. Filatov AR. Outlook for application of smooth particle hydrodynamics for numerical modeling of ice loads. *Transactions of the Krylov State Research Centre.* 2022;2(400):24–39. doi: 10.24937/2542-2324-2022-2-400-24-39
15. Pan W, Tartakovsky AM, Monaghan JJ. A smoothed-particle hydrodynamics model for ice-sheet and ice-shelf dynamics. *Journal of Glaciology.* 2012;58(208):216–222. doi: 10.3189/2012JoG11J084
16. Staroszczyk R. SPH Modeling of Sea-ice Pack Dynamics. *Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics.* 2017;64(2):115–137. doi: 10.1515/heem-2017-0008
17. Shen HT, Su J, Liu L. SPH Simulation of River Ice Dynamics. *Journal of Computational Physics.* 2000;165(2):752–770. doi: 10.1006/jcph.2000.6639
18. Wu Y, Hu W, Pan X, Wu CT. Recent development of Smoothed Particle Galerkin (SPG) Method for Joint Modeling. In: *16th International LS-DYNA Users Conference*; 2020. Berkeley: ANSYS, 2020.
19. Wu Y, Guo Y, Hu W. An Introduction to the LS-DYNA Smoothed Particle Galerkin Method for Severe Deformation and Failure Analyses in Solids. In: *13th LS-DYNA Users Conference*; 2014. Berkeley: ANSYS, 2020.
20. Wu Y, Wu CT, Hu W. Parametric and convergence studies of the smoothed particle Galerkin (SPG) method in semi-brittle and ductile material failure analyses. In: *15th International LS-DYNA Users Conference, 2018.* Berkeley: ANSYS; 2020.
21. Filatov AR. Numerical modeling of ice loads using meshless SPH and SPG methods. *Transactions of the Krylov State Research Centre.* 2022;S1:7–10. (In Russ.) EDN: TVIADE doi: 10.24937/2542-2324-2022-1-S-1-7-10
22. Tong Z, et al. Simulation analysis on collision performance of polar cruise vessel based on JH-2 sea ice mod-el. *Chinese Journal of Ship Research.* 2021;16(5):87–94.
23. Grinevich DV. Review of the application of numerical methods for modeling ice deformation and destruction. *Trudy VIAM.* 2020;8(90):109–122. (In Russ.) EDN: WQNHTP doi: 10.18577/2307-6046-2020-0-8-109-122
24. Williams JR, et al. The Theoretical Basis of the Discrete Element Method. In: *Proceedings from Conference Numerical Methods of Engineering, Theory and Applications.* 1985:897–906.
25. Cundall PA, Strack ODL. A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique.* 1979;29(1):47–65. doi: 10.1680/geot.1979.29.1.47
26. Potyondy DO, Cundall PA. A bonded-particle model for rock. *Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences.* 2004;41(8):1329–1364. doi: 10.1016/j.ijrmms.2004.09.011
27. Ji S, Di S, Long X. DEM Simulation of Uniaxial Compressive and Flexural Strength of Sea Ice: Parametric Study. *Journal of Engineering Mechanics.* 2017;143(1):4–11. doi: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000996
28. Ji S. Discrete Element Modeling of Ice Loads on Ship and Offshore Structures. In: *Li, X., Feng, Y., Mustoe, G. (eds) Proceedings of the 7th International Conference on Discrete Element Methods. DEM 2016. Springer Proceedings in Physics.* Singapore: Springer; 2017;188. doi: 10.1007/978-981-10-1926-5_6
29. Jou O, Celigueta MA. A bonded discrete element method for modeling ship-ice interactions in broken and unbroken sea ice fields. *Comp. Part. Mech.* 2019;6(6):739–765. doi: 10.1007/s40571-019-00259-8
30. Hu B, Liu L, Wang D, et al. GPU-Based DEM Simulations of Global Ice Resistance on Ship Hull During Navigation in Level Ice. *China Ocean. Eng.* 2021;35:228–237. doi: 10.1007/s13344-021-0020-5
31. Hissette Q, Alekseev A, Seidel J. Discrete Element Simulation of Ship Breaking Through Ice Ridges. In: *Proceedings from the 27th International Ocean and Polar Engineering Conference.* San Francisco: ISPE; 2017:1–15.
32. Neto AV. Improvement of Rubble Ice Generation in Numerical Simulation of Ice Ridge and Structure Interaction. [Master thesis] Liège; 2017.
33. Polojärvi A. Sea ice ridge keel punch through experiments: model experiments and numerical modeling with discrete and combined finite-discrete element methods [Doctoral theses] Espoo; 2013.
34. Tuhturi J, Polojärvi A. A review of discrete element simulation of ice-structure interaction. *Philosophical transactions. Series A: Mathematical, physical, and engineering sciences.* 2018;376(2129). doi: 10.1098/rsta.2017.0335
35. Rodionov AA, Ryabushkin SV. Use of meshless procedures for numerical modeling of mechanical behavior of ice in a wide range of external influences. *Morskie intelektualnye tekhnologii.* 2024;3-2(65):83–94. (In Russ.) EDN: GJPHAD doi: 10.37220/MIT.2024.65.3.011
36. Rodionov AA, Ryabushkin SV. Numerical modeling of mechanical behavior of ice under quasi-static and dynamic loads. *Morskie intelektualnye tekhnologii.* 2023;4-2:99–105. (In Russ.) EDN: KSEFLM doi: 10.37220/MIT.2023.62.4.051
37. Johnson GR, Holmquist TJ. An improved computational constitutive model for brittle materials. *AIP Conf. Proc.* 1994;309:981–984. doi: 10.1063/1.461199
38. Gazonas G. *Implementation of Johnson-Holmquist II (JH-2) Constitutive Model into DYNA3D.* Aberdeen: Army Research Laboratory; 2002.

ОБ АВТОРАХ

Александр Александрович Родионов, д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедры строительной механики корабля, Санкт-Петербургский государственный морской технический университет; eLibrary SPIN: 1637-9588; e-mail: rodionovsmk@yandex.ru

***Сергей Владимирович Рябушкин**, аспирант кафедры строительной механики корабля, Санкт-Петербургский государственный морской технический университет; адрес: 190121, Санкт-Петербург, ул. Лощманская, 10; e-mail: serg.ryabuschkina@yandex.ru

AUTHORS' INFO

Aleksandr A. Rodionov, Dr. Sci. (Engineering), Professor, Head of the Department of Ship Mechanics, Saint Petersburg State Marine Technical University; eLibrary SPIN: 1637-9588; e-mail: rodionovsmk@yandex.ru

***Sergey V. Ryabushkin**, graduate student, Department of Ship Mechanics, Saint Petersburg State Marine Technical University; address: Lotsmanskaya, 10, Saint Petersburg, 190121, Russia; e-mail: serg.ryabuschkina@yandex.ru

* Автор, ответственный за переписку / Corresponding author